

2. Используя критерий Гурвица, определить устойчивость замкнутой системы (для $K=1$) и найти $K_{пред}$ по заданным передаточным функциям разомкнутых систем:

$$4. \quad Wp(p) = \frac{K}{p^3 + 4p^2 + 4p + 1}$$

Решение

Запишем передаточную функцию (ПФ) замкнутой системы при $K = 1$ и определим её устойчивость по критерию Гурвица:

$$Wз(p) = \frac{Wp(p)}{1 + Wp(p)} = \frac{\frac{1}{p^3 + 4p^2 + 4p + 1}}{1 + \frac{1}{p^3 + 4p^2 + 4p + 1}} = \frac{1}{p^3 + 4p^2 + 4p + 2}$$

Формируем матрицу Гурвица:

$$D(p) = p^3 + 4p^2 + 4p + 2$$

$$a_0 := 1 \quad a_1 := 4 \quad a_2 := 4 \quad a_3 := 2$$

$$\Gamma := \begin{pmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Рассчитаем определители 1, 2 и 3 порядка:

$$\Delta_1 := |(a_1)| = 4 \quad \Delta_2 := \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = 14 \quad \Delta_3 := \Delta_2 \cdot a_3 = 28$$

Таким образом, все определители Гурвица и коэффициент при старшей степени, равный 1, положительны, следовательно, замкнутая система с $K=1$ устойчива.

Найдем $K_{\text{пред}}$, для чего используем K при записи передаточной функции замкнутой системы

$$W_{\text{з}}(p) = \frac{W_p(p)}{1 + W_p(p)} = \frac{\frac{K}{p^3 + 4p^2 + 4p + 1}}{1 + \frac{K}{p^3 + 4p^2 + 4p + 1}} = \frac{K}{p^3 + 4p^2 + 4p + K + 1}$$

Формируем матрицу Гурвица:

$$D(p) = p^3 + 4p^2 + 4p + K + 1$$

$$a_0 := 1 \quad a_1 := 4 \quad a_2 := 4 \quad a_3 := K + 1$$

$$\Gamma := \begin{pmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{pmatrix} \quad \Gamma \rightarrow \begin{pmatrix} 4 & K + 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & K + 1 \end{pmatrix}$$

Рассчитываем определители:

$$\Delta_1 := |(a_1)| = 4$$

$$\Delta_2 := \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} \quad \Delta_2 \rightarrow 15 - K$$

Отсюда следует, что K должно быть меньше 15.

$$\Delta_3 = (15 - K) \cdot (K + 1)$$

Отсюда следует, что K должно быть больше -1.

Таким образом, получили, что для устойчивости замкнутой системы K должно лежать в диапазоне от -1 до 15.